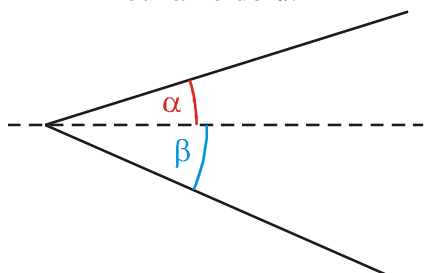


## 4.2.2 Slovní úlohy na využití goniometrických funkcí ostrého úhlu

### Předpoklady: 4201

Nejdříve dva termíny:

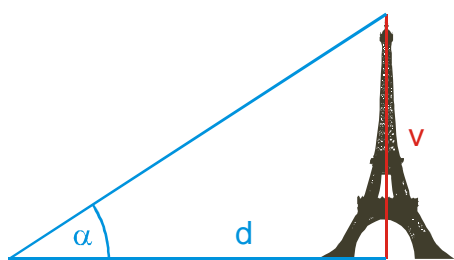
- **výškový úhel (na obrázku  $\alpha$ ):** Úhel ve svislé rovině, který udává odchylku přímky spojující pozorovatele s pozorovaným předmětem od vodorovné roviny. Koukáme nahoru.
- **hloubkový úhel (na obrázku  $\beta$ ):** Úhel ve svislé rovině, který udává odchylku přímky spojující pozorovatele s pozorovaným předmětem od vodorovné roviny. Koukáme dolů.



**Pedagogická poznámka:** Velký význam při řešení následujících příkladů mají správně nakreslené obrázky. Je třeba hlídat, aby zadání odpovídaly (pravé úhly jsou opravdu pravé), případně zvýrazňovaly jeho podstatné rysy (například vzájemné velikosti stran).

**Pedagogická poznámka:** Zadání většinou záměrně neobsahují obrázky. Největším problémem je pro většinu studentů právě jejich nakreslení.

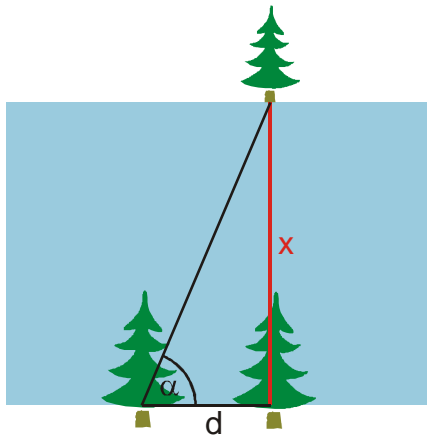
**Př. 1:** Vrchol Eiffelovy věže je vidět ze vzdálenosti 500 m pod výškovým úhlem  $32^{\circ}57'$ . Urči výšku věže.



Z obrázku vidíme, že platí:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{d} \Rightarrow v = \operatorname{tg} \alpha \cdot d = \operatorname{tg} 32^{\circ}57' \cdot 500 \text{ m} = 324 \text{ m}$

Eiffelova věž je vysoká 324 metrů.

**Př. 2:** Na břehu řeky jsou dva stromy vzdálené od sebe 50 m. Na protějším břehu stojí další strom tak, že spolu s předchozími tvoří pravouhlý trojúhelník, jehož druhou odvěsnou je šířka řeky. Urči šířku řeky, pokud přepona stromového trojúhelníku svírá s břehem úhel  $67^\circ$ .



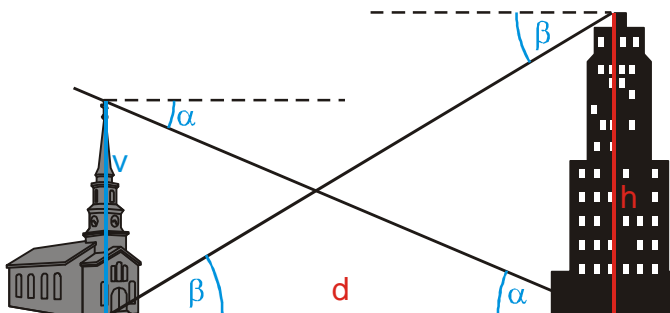
Z obrázku vidíme, že platí:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{d} \Rightarrow x = \operatorname{tg} \alpha \cdot d = \operatorname{tg} 67^\circ \cdot 50 \text{ m} = 118 \text{ m}$

Řeka je široká 118 metrů.

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti mají trochu problémy s nakreslením obrázku.

Nejčastěji špatně zakreslí vyznačený úhel (zřejmě z podvědomé snahy dosáhnout toho, aby řeka byla užší než vzdálenost naměřená na jejím břehu).

**Př. 3:** Na opačných koncích náměstí stojí proti sobě kostelní a radniční věž. Kostelní věž je vysoká 45 m a z jejího vrcholu je vidět pata radniční věže pod hloubkovým úhlem  $\alpha = 23^\circ$ . Pata kostelní věže je z vrcholu radniční věže vidět pod hloubkovým úhlem  $\beta = 31^\circ$ . Bez výpočtu rozhodni, která z věží je vyšší. Urči výšku radniční věže. Jak dlouhé je náměstí?

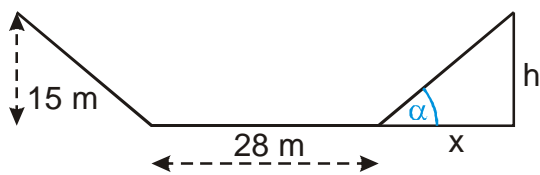


Z obrázku je zřejmé, že radniční věž musí být vyšší.

Nejdříve spočteme délku náměstí:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{d} \Rightarrow d = \frac{v}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{45}{\operatorname{tg} 23^\circ} \text{ m} = 106 \text{ m}$

Výška radnice:  $\operatorname{tg} \beta = \frac{h}{d} \Rightarrow h = \operatorname{tg} \beta \cdot d = \operatorname{tg} 31^\circ \cdot 106 \text{ m} = 63,7 \text{ m}$

**Př. 4:** Při stavbě dálnice je nutné vyhloubit do hřebenu zářez hluboký 15 m. Svah zářezu má mít maximální sklon  $40^\circ$ . Urči, v jaké šíři je třeba odstranit ornici z vrcholu kopce, pokud má budovaná komunikace mít šířku 28 m.



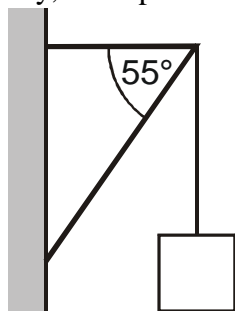
Musíme spočítat vzdálenost vyznačenou na obrázku jako  $x$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{15}{\operatorname{tg} 40^\circ} \text{ m} = 18 \text{ m}$$

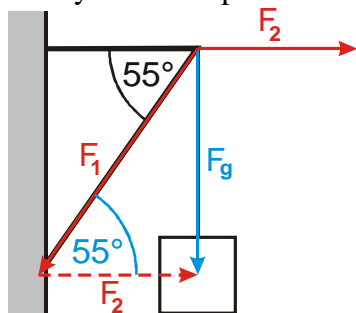
Celková šíře horní hrany zářezu  $x + 28 + x = 18 + 28 + 18 \text{ m} = 64 \text{ m}$

Na vrcholu kopce je třeba odstranit ornici v šíři 64 m.

**Př. 5:** Na konzoly s vyznačeným úhlem  $55^\circ$  je zavěšen náklad o hmotnosti 120 kg. Urči síly, které působí na obě příčky konzoly.



Zakreslíme do obrázku sílu  $F_g = 1200 \text{ N}$ , kterou působí náklad na konzolu, a rozložíme ji na složky ve směru příček.



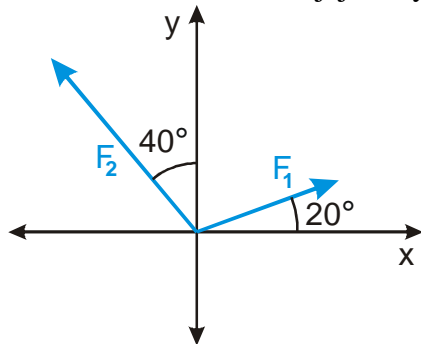
$$\sin \alpha = \frac{F_g}{F_1} \Rightarrow F_1 = \frac{F_g}{\sin \alpha} = \frac{1200}{\sin 55^\circ} \text{ N} = 1460 \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_g}{F_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_g}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1200}{\operatorname{tg} 55^\circ} \text{ N} = 840 \text{ N}$$

Zavěšený náklad bude na příčky konzoly působit silami 1460 N a 840 N.

**Pedagogická poznámka:** S rozkladem síly  $F_g$  bude některým studentům určitě potřeba pomoci. Zbytek příkladu pak dořeší sami.

**Př. 6:** V soustavě souřadnic jsou zakresleny dvě síly  $F_1 = 20\text{ N}$ ,  $F_2 = 30\text{ N}$ . Rozlož obě síly do složek. Urči velikost jejich výslednice a úhel, který výslednice svírá s osou  $x$ .



Rozklad síly  $F_1$ :

- $\cos \alpha = \frac{F_{1x}}{F_1} \Rightarrow F_{1x} = \cos 20^\circ \cdot 20 = 18,79\text{ N}$
- $\sin \alpha = \frac{F_{1y}}{F_1} \Rightarrow F_{1y} = \sin 20^\circ \cdot 20 = 6,84\text{ N}$

Rozklad síly  $F_2$ :

- $\sin \beta = \frac{F_{2x}}{F_2} \Rightarrow F_{2x} = \sin 40^\circ \cdot 30 = 19,28\text{ N}$
- $\cos \beta = \frac{F_{2y}}{F_2} \Rightarrow F_{2y} = \cos 40^\circ \cdot 30 = 22,98\text{ N}$

**Pedagogická poznámka:** Někteří studenti přehlédnou, že síla  $F_2$  svírá úhel  $40^\circ$  se svislou osou a je nutné použít jiné goniometrické funkce než u síly  $F_1$ .

**Shrnutí:** Pomocí goniometrických funkcí můžeme řešit mnoho situací z reálného života, ve kterých dokážeme najít pravoúhlý trojúhelník.